Δίνεται η εξίσωση : $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^\nu}{\nu}=0$,

$\nu \in \mathbb{N}$

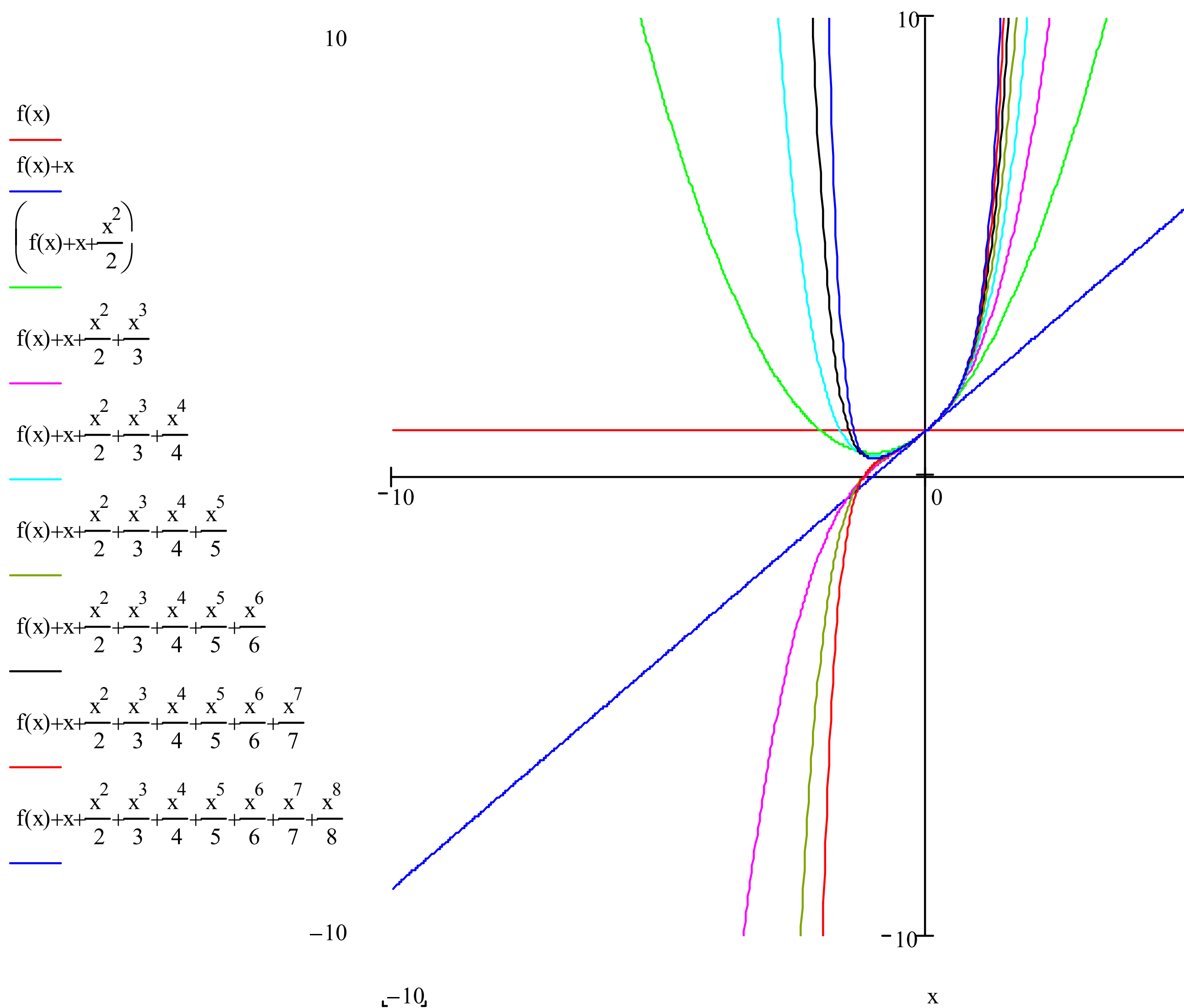
Να εξεταστεί υπό ποίες προϋποθέσεις η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες και πόσες.

Απάντηση :

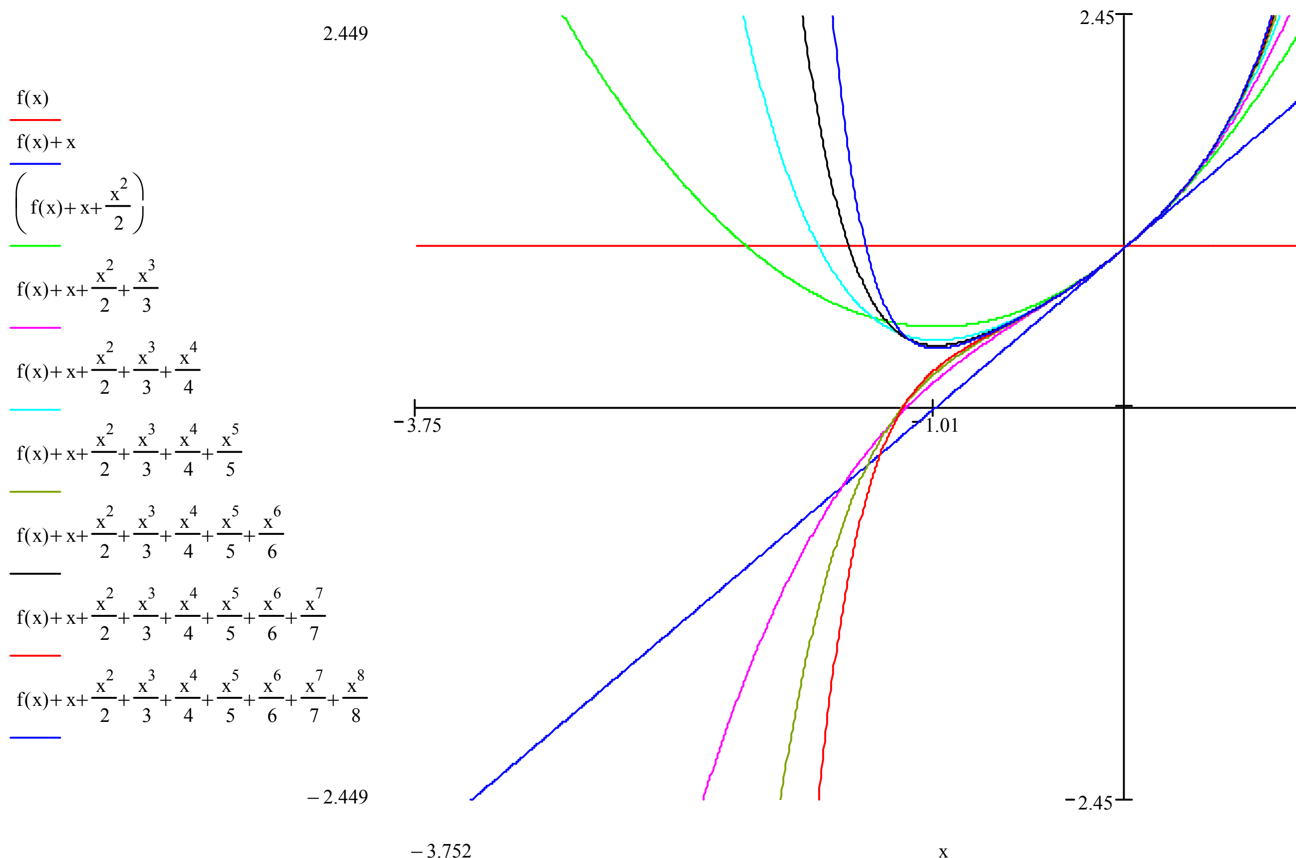
Με την βοήθεια του λογισμικού mathcad , κατασκευάζω τις συναρτήσεις

$f_\nu(x)= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^\nu}{\nu},\ \ \nu=1(1)9$

Η πρώτη εικόνα που λαμβάνω προσαρμόζοντας και τα όρια για το χ και για το ψ μεταξύ –10 και 10 είναι η παρακάτω:



Εικόνα 1: Η πρώτη εντύπωση και η συνακόλουθη εικασία που κάνουμε, είναι ότι για άρτιο ν δεν έχω ρίζα, ενώ για περιττό ν έχω ακριβώς μία. Μάλιστα φαίνεται παραδόξως να είναι η ίδια , πράγμα που δεν συμφωνεί με την μαθηματική μας διαίσθηση, αφού κάθε μία εξίσωση προκύπτει από την προηγουμένη δια προσθέσεως ενός νέου όρου . Γι΄αυτό κάνουμε τοπική μεγέθυνση.



Εικόνα 2 : Με την επιλογή «Ζούμ» δεν αίρεται η αρχική μας εντύπωση περί της μιας κοινής ρίζας για όλα τα πολυώνυμα περιττού βαθμού, αλλά βεβαίως, αν υπάρχει αυτή η κοινή ρίζα, είναι έστω ρ ≠ ο . Αλλά αυτό απορρίπτεται.

Πράγματι, αν υπάρχει κοινή ρίζα η ρ , λ.χ. για ν=3 και για ν=5 τότε θα έχω $1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/3=1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/3+\rho^4/4+\rho^5/5 \Rightarrow$

$$\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^5}{5} + 0 \Rightarrow$$

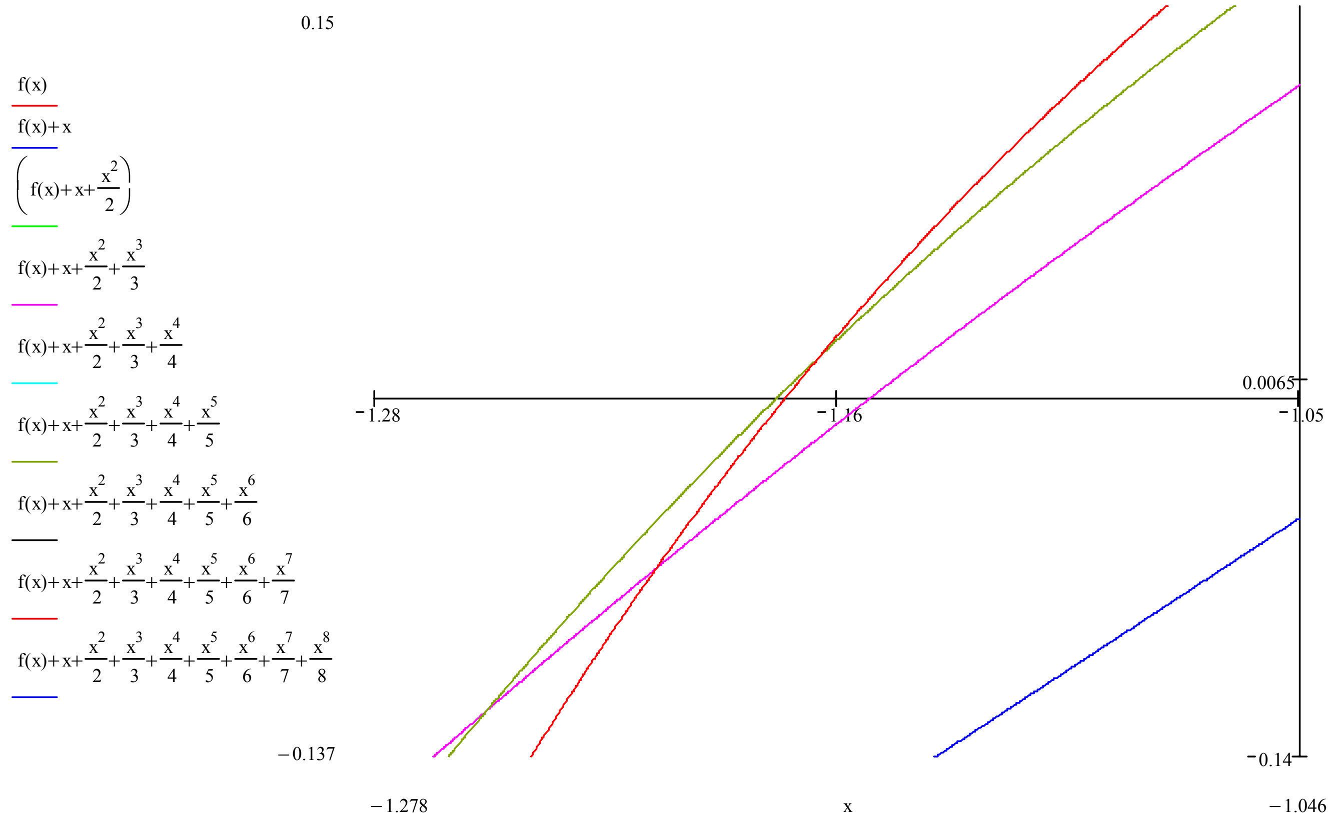
$$5\rho^4 + 4\rho^5 = 0 \Rightarrow$$

$$\rho^4(5 + 4\rho) = 0 \Rightarrow (\rho \neq 0)$$

$$\rho = -\frac{5}{4}$$

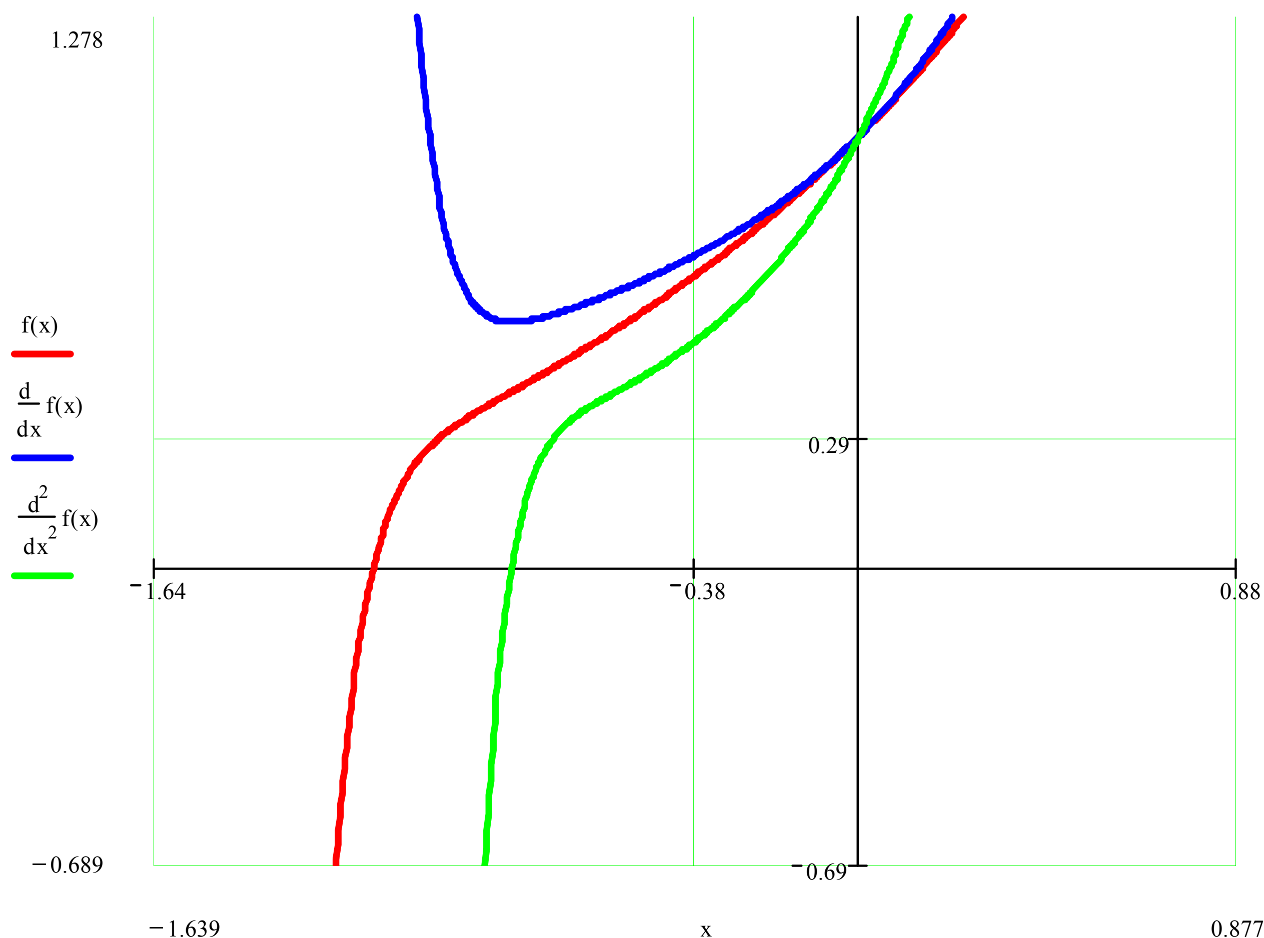
«άτοπο» , διότι –5/4 =-1,25 ενώ η επιλογή «ίχνος» μας δίνει για ψ (περίπου) ίσο με μηδέν χ=-1,16.

Παρ΄όλα ταύτα, δεν είναι ισχυρή η ένδειξη, γι ΄αυτό προβαίνουμε σε μεγαλύτερη μεγέθυνση:

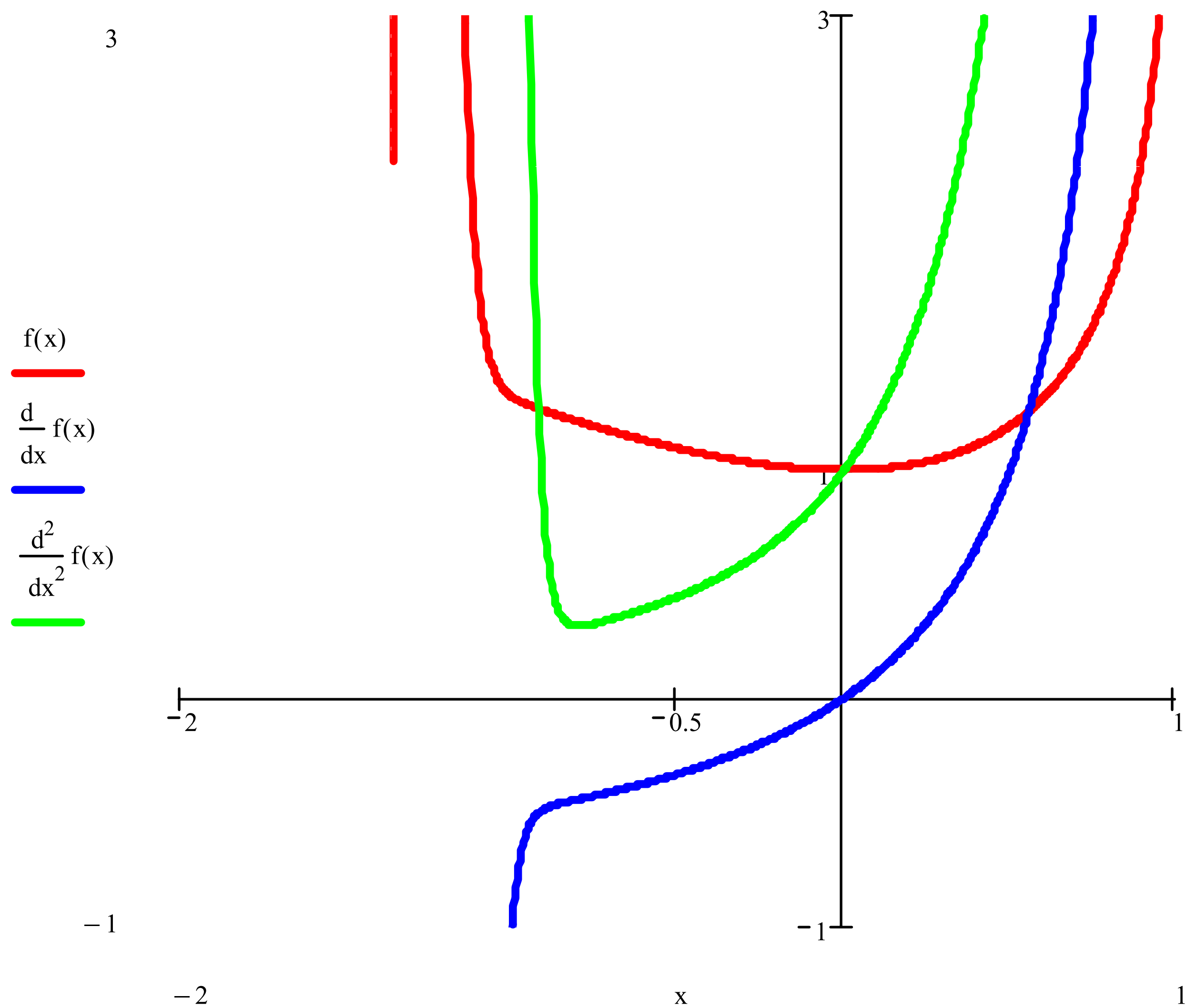


Εικόνα 3: Τώρα καθίσταται σαφές ότι οι ρίζες είναι διακριτές , πάρα πολύ «κοντά» αλλά διαφορετικές για κάθε πολυώνυμο.

Εικόνα 4: ακόμα και για πολύ μεγάλες τιμές λ.χ. ν=42 , ν=43 έχουμε την ίδια συμπεριφορά .



Εικόνα 5 : Για ν=17 , και για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο , έχω το πιο πάνω διάγραμμα . Η f(χ)=0 έχει μία λύση , διότι η πρώτη παράγωγος (γαλάζια) είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό και ως γνησίως μονότονη στο R θα έχει μία μόνο λύση. Το σημείο μηδενισμού της δευτέρης παραγώγου,(πράσινης) μας δίνει το σημείο καμπής στην f(x)



Εικόνα 6: Για ν=42 και για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο έχω τα παραπάνω διαγράμματα. Εδώ δεν έχω λύση διότι 42 άρτιος

$$f_\nu(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu}$$

Εξετάζω δύο περιπτώσεις όπως και προηγουμένως:

(i) ν=2ρ

(ii) ν=2ρ+1 , $\rho \in \mathbb{N}$

Για την πρώτη περίπτωση βρίσκω πρώτη και δεύτερη παράγωγο:

$$f'_\nu(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{\nu-1} \quad (1)$$

Για καλύτερη αλγεβρική επεξεργασία , η (1) μπορεί να πάρει την μορφή

$$f'_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{\chi^\nu - 1}{\chi - 1}, \alpha\nu\ \chi \neq 1 \\ \nu, \alpha\nu\ \chi = 1 \end{cases}$$

$$f''_\nu(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (\nu - 1)\chi^{\nu-2}$$

$$f'_\nu(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^\nu - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^{2\rho} = 1 \Leftrightarrow (\chi \neq 1, \delta\iota o\tau\iota\ \ f'(1) = \nu)$$

$$\chi = -1$$

Άρα το -1 είναι θέση πιθανού ακροτάτου.

$f_{\nu}''(-1)$= 1-2+3-4+5-6+……-(ν-2)+(ν-1)

$\Longrightarrow$

$f_{\nu}''(-1)=(-1)3\rho \Longrightarrow$

$f_{\nu}''(-1)=-3\rho<0$

Άρα στο –1 έχω ελάχιστη τιμή στην συνάρτηση την

$f_{\nu}(-1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu} \Longrightarrow$

$f_{\nu}(-1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+......\frac{1}{(\nu-2)(\nu-1)}+\frac{1}{\nu}>0$

Δηλαδή, το ελάχιστο της συνάρτησης f(x) με πεδίο ορισμού το R , είναι θετικό .

Άρα η f(x) δεν μηδενίζεται στο R και άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις για ν=2ρ+1

Τότε

$f_{n}''(x)=0 \Leftrightarrow$

$x^{2\rho+1}=1 \Leftrightarrow (\chi \neq 1, \delta\iota o\tau\iota\ f'(1)=\nu)$

χ=1 (απορρίπτεται λόγω της προηγούμενης συνθήκης)

Δηλ. δεν έχω ακρότατα , ενώ ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το R .

Από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι θα είναι μονότονη και μη σταθερή , άρα θα τέμνει τον άξονα των χχ' και θαέχω μία ρίζα.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και με άλγεβρα επιλύοντας την ανίσωση

$$1+x+x^2+x^3+...+x^{\nu-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi^{2\rho+1}-1}{\chi-1}>0 \Leftrightarrow (\chi \neq 1)$$

$$(\chi^{2\rho+1}-1)(\chi-1)>0$$

Και έχω τον παρακάτω πίνακα:

X-1	-	-	+
$X^{2\rho+1}$-1	-	-	+
Γ	+	+	+

$-\infty$ -1 +1 ∞

Από όπου λαμβάνουμε ότι η πρώτη παράγωγος είναι θετική στο R , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Ακριβέστερος εντοπισμός των ριζών

Παρατηρούμε ότι f(0)=1>0 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$f_n(-2)=(1-2)+(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3})+(\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{5})+......+(\frac{2^{2\rho}}{2\rho}-\frac{2^{2\rho+1}}{2\rho+1}) \Rightarrow$

$f_\nu(-2)=+(-1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{2^{2\rho}(1-2\rho)}{2\rho(2\rho+1)} \Rightarrow$ (Όλοι οι όροι είναι αρνητικοί)

$f_\nu(x)<0$

Επομένως, $f_\nu(0)\ f_\nu(-2)<0$ και η f είναι συνεχής και παραγωγήσιμη. Άρα με βάση το Θεώρημα του Bolzano , υπάρχει ρίζα ανάμεσα στο –2 και το 0 και όπως έχουμε ήδη δείξει είναι μοναδική και πραγματική.

<u>Σχετικά με την προσεγγιστική μέθοδο Newton –Raphson</u>

Για να εφαρμοσθεί η μέθοδος των Newton Raphson , θα πρέπει να εξασφαλισθεί ότι ανάμεσα στην ρίζα και το σημείο εκκίνησης, δεν έχουμε αλλαγή καμπυλότητας.

Εδώ, για ολόκληρη την οικογένεια κατάλληλο σημείο εκκίνησης είναι το –2 και όχι το 0.

Κατά τα γνωστά η ακολουθία που συγκλίνει στις ρίζες της συνάρτησης είναι:

$$\chi_\nu = \chi_{\nu-1} - \frac{f_n(x_{\nu-1})}{f_n'(x_0)} \;, \mu\varepsilon \;\; \chi_0 = -1 \kappa\alpha\iota \; f_n{}'(-1) = \frac{-1-1}{-1-1} = 1 \neq 0$$

$$\chi_\nu = \chi_{\nu-1} - f_n(x_{\nu-1}) \quad , \chi_0 = -1 \quad (n \;\; \sigma\tau\alpha\theta., \;\; \nu \, \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\eta)$$

και $x_\nu \to \rho$

Με ένα πρόγραμμα που περιέχει επαναληπτική αναδρομική εντολή, μπορούμε να υπολογίσουμε με την βοήθεια Η/Υ όσους όρους θέλουμε από την παραπάνω ακολουθία και να υπάρχει ένα κριτήριο (αυθαίρετο) δια κοπής της διαδικασίας, όταν φθάσουμε στην εκ των προτέρων επιθυμητή ακρίβεια. Δηλαδή, μπορεί να καθορισθεί ένας εκ των προτέρων αριθμός βημάτων πέραν των οποίων διακόπτεται η διαδικασία ή εάν η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας γίνει μικρότερη από την επιθυμητή ακρίβεια.

Λόγου χάριν εάν

$\left|\chi_\nu - \chi_{\nu-1}\right| \leq 10^{-6}$, όπου υπολογίζεται η ρίζα με προσέγγιση εκατομμυριοστού.